Développement : Prolongement de Γ.

RM

2022-2023

Référence :

1. Analyse pour l'agrégation
2. Objectif agrégation

Énoncé :

On considère la fonction *Gamma* d'Euler définie sur $\omega = \{Re(z) > 0\}$ par

$$\begin{array}{rccl} \Gamma : & \{Re(z) > 0\} & \to & \mathbb{C} \\ & z & \mapsto & \int_0^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}dt \end{array}.$$

Alors Γ est holomorphe sur $\{Re(z) > 0\}$, vérifie $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ et se prolonge en une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$ de pôles $-n, n \in \mathbb{N}$.

On rappelle avant :

Théorème 1 : Soit $\sum f_n$ une série de fonctions méromorphe sur $\mathcal{U}$ tel que pour tout compact K de $\mathcal{U}$, il existe N_K tel que, pour tout $n \geq N_K$, les f_n n'ont pas de pôles dans K, et que $\sum_{n \geq N_K} f_n$ converge uniformément sur K. Alors la somme de cette série est méromorphe sur $\mathcal{U}$ et on peut dériver terme à terme.

Résolution :

Utilisons le théorème d'holomorphie sous le signe intégrale. Pour $t > 0$ fixé, on a que $z \mapsto e^{z\ln(t)}$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$ et si K est un compact de ω, on a $Re(z) \in [\varepsilon, M]$ pour $z \in K$, où $\varepsilon > 0$ et donc

$$\left\{ \begin{array}{l} |e^{-t}e^{(z-1)\ln t}| \leq e^{(\varepsilon-1)\ln t} = \frac{1}{t^{1-\varepsilon}} \text{ si } 0 < t \leq 1 \\ |e^{-t}e^{(z-1)\ln t}| \leq t^{M-1}e^{-t} \text{ si } t \geq 1 \end{array} \right. .$$

Comme ces deux fonctions sont intégrables sur $[0,1]$ et $[1,+\infty[$, on a notre hypothèse de domination sur tout compact. Enfin, on a que la fonction à z fixé dans ω $t \mapsto e^{-t}t^{z-1}$ est intégrable car $|e^{-t}t^{z-1}| = e^{-t}t^{Re(z)-1} = O\left(1/t^2\right)$ qui est intégrable sur $[1,+\infty[$ et sur $[0,1]$ car $Re(z) > 0$ donc $t^{Re(z)-1}$ intégrable sur $[0,1]$.
On en conclut en premier lieu que la fonction Γ est holomorphe sur ω.
Pour la relation une i.p.p suffit

$$\Gamma(z+1) = \int_0^{+\infty} t^z e^{-t}dt = \left[-t^z e^{-t}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} zt^{z-1}e^{-t}dt = z\Gamma(z).$$

On en déduit alors que $\Gamma(n+1) = n!$ car $\Gamma(1) = 1$.
Passons au prolongement. Découpons l'intégrale définissant Γ de la façon suivante :

$$\Gamma(z) = \int_0^1 e^{-t}t^{z-1}dt + \int_1^{+\infty} e^{-t}t^{z-1}dt.$$

Visiblement, il s'agit d'exprimer la première intégrale sous forme d'une série. L'idée est de développer l'exponentielle. On écrit

$$e^{-t}t^{z-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} t^{n+z-1}.$$

Invertissons somme et intégrale grâce aux théorèmes de Fubini (appliqué à la mesure produit de la mesure de Lebesgue et de comptage). Il suffit de montrer que

$$\int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n!} t^{n+z-1} \right| dt < +\infty$$

> En effet, pour utiliser Fubini, il faut vérifier que $f(n,t) = \frac{(-1)^n}{n!} t^{n+z-1}$ est intégrable sur la mesure produit. Pour ça on utilise le fait que f est intégrable si $\int |f|$ converge . Comme $|f| > 0$, Fubini-Tonelli nous dit que $\int_{\mathbb{N}\times[0,1]} |f| d\mu = \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{+\infty} |f(n,t)| \right) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 |f(n,t)| dt$. Donc si le terme du milieu est finie, alors de celui de gauche aussi et donc f est bien intégrable, et donc Fubini nous assure notre interversion.

Remarquons que pour tout $t > 0$, $|t^z| = t^{Re(z)}$. On obtient alors pour tout $t \in]0,1]$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n!} \right| |t^{n+z-1}| = t^{Re(z)-1} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} = e^t t^{Re(z)-1}.$$

Comme $Re(z) > 0$, la fonction $t \mapsto e^t t^{Re(z)-1}$ est intégrable sur $]0,1]$. Le théorème de Fubini justifie donc l'interversion somme intégrale : on a donc

$$\int_0^1 e^{-t} t^{z-1} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^1 t^{n+z-1} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(z+n)}.$$

Donc sur ω, on a $\Gamma(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(z+n)} + \int_1^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt$.

Utilisons le théorème 1 pour la méromorphie de $f : z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(z+n)}$.

• Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f_n : z \mapsto \frac{(-1)^n}{n!(z+n)}$ est méromorphe sur $\mathbb{C}$ avec pour seul pôle (simple) l'entier $-n$.

• Soit K un compact de $\mathbb{C}$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $K \subset \overline{D(0,N)}$. Pour $n > N$, la fonction f_n n'a pas de pôle dans K. De plus, pour tout $z \in \mathbb{K}$, on a

$$n = |n + z - z| \leq |n + z| + |z| \Rightarrow |z + n| \geq n - |z| \geq n - N$$

Par conséquent $|f_n(z)| \leq \frac{1}{n!(n-N)}$ pour tout $z \in K$ et la série $\sum_{n>N} f_n$ est donc normalement convergente sur K.
Le théorème 1 nous permet de dire que f est une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$ dont les pôles (simples) sont les entiers négatifs.

En reprenant l'hypothèse de domination si $t \geq 1$ (on prend un compact sur $\mathbb{C}$ de borne M aussi), on prouve alors que $z \mapsto \int_1^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$. On a alors que

$$z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!(z+n)} + \int_1^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt.$$

établit un prolongement méromorphe sur $\mathbb{C}$ de la fonction Γ. Comme l'ensemble ω à un point d'accumulation dans $\mathbb{C} \setminus -\mathbb{N}$ qui est un ouvert connexe, d'après le principe du prolongement analytique, on a que cette fonction est l'unique prolongement analytique de Γ.